Prednáška 13

13.1. Integrály na varietách (plošné integrály)

Aby sme mohli odvodiť vzorec pre plošný obsah "krivej" k-plochy, budeme potrebovať vyjadrenie tohto obsahu pre tzv. k-rovnobežnosteny, akési k-rozmerné rovnobežníky. Z algebry vieme, že ten je daný jedným bodom $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ a k nezávislými vektormi $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, k$. Je to vlastne množina bodov

$$P(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \sum_{i=1}^{k} t_i \, \mathbf{x}_i, \quad t_i \in (0,1), i = 1, \ldots, k \right\}.$$

Zrejme pre $r = 3$ je to pre $k = 1, 2$, úsečka resp. rovnobežník. Zrejme posun nemôže mať vplyv na objem a tak stačí uvažovať k nezávislých vektorov. Objem v jednorozmernom prípade je samozrejme dĺžka vektora $\mathbf{x}_1$, teda $V_1 = |\mathbf{x}_1|$. ďalej označme $\mathbf{h}_j$ kolmicu spustenú z konca vektora $\mathbf{x}_{j+1}$ na podpriestor $\operatorname{lin}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_j)$, $j = 1, \ldots, k-1$. Potom zrejme $V_2 = V_1 |\mathbf{h}_1|$ a teda $V_k = V_{k-1} |\mathbf{h}_{k-1}|$. Dokopy teda máme $V_k = |\mathbf{x}_1||\mathbf{h}_1| \ldots |\mathbf{h}_{k-1}|$. Avšak kolmicu $\mathbf{h}_1$ môžeme vyjadriť ako $\mathbf{h}_1 = \mathbf{x}_2 - \alpha \mathbf{x}_1$. Z podmienky kolmosti vektorov $\mathbf{x}_1, \mathbf{h}_1$ máme

$$\alpha = \frac{\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle}{|\mathbf{x}_1|^2}.$$

Takže platí $V_2^2 = |\mathbf{x}_1|^2 |\mathbf{x}_2|^2 - \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle^2$, čo je zrejme determinant matice

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle \end{bmatrix}.$$

Podobne sa ukáže vzorec pre k-rozmerný prípad. Dostaneme tak definíciu

Definícia 13.1.1.

Nech $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, potom pre k vektorov z $\mathbb{R}^n$ definujeme Grammovu maticu (determinant - gramián)

$$G(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_k \rangle \\ \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_2 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k \rangle \end{bmatrix}.$$

Poznámka 13.1.2.

Gramova matica je vlastne súčin matíc $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ a taktiež sa dá definovať pomocou zovšeobecnenia vektorového súčinu.
Ak je $\mathbf{Q}$ ortogonálna matica (tj. $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I} \leftrightarrow \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q}^{-1}$), potom $G(\mathbf{Q}\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{Q}\mathbf{x}_k) = G(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k)$ pre všetky $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$.

Definícia 13.1.3.

Nech $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^{n-1}$ sú lineárne nezávislé vektory z $\mathbb{R}^n$. Ich vektorovým súčinom nazývame vektor $\mathbf{v} = [\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^{n-1}]$ s i–tou zložkou $v_i := (-1)^{n+i} \det V_i$, kde V_i je matica, ktorú dostaneme z matice $(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^{n-1})$ vynechaním i-teho riadku.

Poznámka 13.1.4.

Platí

$$[\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^{n-1}] = \begin{vmatrix} v_1^1 & v_1^2 & \ldots & v_1^{n-1} & \mathbf{e}_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ v_n^1 & v_n^2 & \ldots & v_n^{n-1} & \mathbf{e}_n \end{vmatrix}.$$

Ak $n = 3$, tak ide o štandardný vektorový súčin.

Veta 13.1.5 (Vlastnosti vektorového súčinu).

Vektorový súčin $[\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{n-1}]$ má tieto vlastnosti

a) je lineárnou funkciou každej premennej

b) zámena dvoch premenných zmení iba znamienko súčinu

c) súčin je jednoznačne určený vzťahom

$$[\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{n-1}] \cdot \mathbf{y} = \det(\mathbf{v}^1 \dots \mathbf{v}^{n-1}\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

d) je ortogonálny ku každému z vektorov $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{n-1}$

e) $\|[\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{n-1}]\|^2 = \det(\mathbf{v}^1 \dots \mathbf{v}^{n-1}[\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{n-1}])$

f) $[\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{n-1}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{n-1}$ sú LZ

g) jeho dĺžka je rovná plošnému obsahu rovnobežnostena, určeného vektormi $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{n-1}$

h) báza $\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{n-1}, [\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{n-1}]\}$ je súhlasne orientovaná s kanonickou bázou, tj.

Poznámka 13.1.6.

Takýto vektor je nenulový a teda naozaj dopĺňuje systém $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{n-1}$ na bázu v $\mathbb{R}^n$.
Zrejme z g) platí $\det G(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{n-1}) = \|[\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{n-1}]\|^2$.
Vo všeobecnosti sa pre $k \le n-1$ definuje tzv. vonkajší súčin vektorov, ktorý však v prípade $k < n-1$ nie je vektorom - viď teória diferenciálnych foriem.

Veta 13.1.7.

Pre k-rovnobežnosten $P(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ platí

$$S_k(P) = \sqrt{\det G(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)} > 0,$$

kde pre $k = n$ kladieme $S_n(P) = \lambda_n(P)$.

Definícia 13.1.8.

Ak je pre $k \in \{1, \dots, n-1\}$ M $k-$rozmerná varieta (s parametrizáciou $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^k \to M \subset \mathbb{R}^n$), potom

$$S_k(M) := \int_A \sqrt{\det G\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t_k}\right)}\, \mathrm{d}\mathbf{t},$$

a integrál 1. druhu cez množinu M z funkcie $f : M \to \mathbb{R}$

$$\int_M f \,\mathrm{d}S := \int_A f(\mathbf{F}(t)) \sqrt{\det G\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t_k}\right)}\, \mathrm{d}\mathbf{t},$$

ak tieto integrály existujú.

Pri integrovaní na varietách uvažujeme iba orietovateľné variety. Heuristický prístup pre dvojrozmerné plochy je takýto: Vezmime za M 2-plochu v $\mathbb{R}^3$ danú zobrazením $\phi : I = (0,1)^2 \to \mathbb{R}^3$. Rozdeľme štvorec I na nm obdĺžnikov o stranách $\Delta t_1 = 1/n$, $\Delta t_2 = 1/m$ s vrcholmi $\mathbf{t}^j$. Potom pre dosť veľké m, n bude platiť (prečo?), že

$$S_2(M) = \int_{(0,1)^2} \sqrt{\det G\left(\frac{\partial \phi}{\partial t_1}, \frac{\partial \phi}{\partial t_2}\right)}\, \mathrm{d}\mathbf{t} \approx \sum_{j=1}^{nm} \sqrt{\det G\left(\frac{\partial \phi}{\partial t_1}(\mathbf{t}^j), \frac{\partial \phi}{\partial t_2}(\mathbf{t}^j)\right)} \Delta t_1 \Delta t_2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{nm} \sqrt{\det G\left(\Delta t_1 \frac{\partial \phi}{\partial t_1}(\mathbf{t}^j), \Delta t_2 \frac{\partial \phi}{\partial t_2}(\mathbf{t}^j)\right)}.$$

Každý sčítanec tohto súčtu je rovný plošného obsahu rovnobežníka, ktorý leží v dotykovej rovine k M v bode $\phi(\mathbf{t}^j)$. Teda kúsky plochy M nahradzujeme rovnobežníkmi v dotykových rovinách k M v príslušných bodoch, ktoré následne sčítame. Pre integrál z funkcie f je to rovnaké, akurát plošný obsah ešte násobíme hodnotou funkcie f v príslušnom bode $\phi(\mathbf{t}^j)$.

Poznámka 13.1.9.

K tomu aby sme mohli počítať musíme formálne do symbolu $\int_M f \, \mathrm{d}S$ dosadiť príslušné veličiny na pravej strane v definícii, tj. definičný obor A zobrazenia $\mathbf{F}$, hodnoty $f(\mathbf{F}(\mathbf{t}))$ a "plošný" element

$$\mathrm{d}S = \sqrt{\det G\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{t}}(\mathbf{t})\right)}.$$

Poznámka 13.1.10.

Ak $k = 1$ ide samozrejme o krivkový integrál 1. druhu. Ak $k = 2$ tento integrál nazývame plošný integrál 1. druhu.
Zrejme sa základné vlastnosti viacnásobných integrálov prenášajú na integrály na varietách.

Poznámka 13.1.11.

Je dobré si pamätať niektoré vyjadrenia plošného elementu $\mathrm{d}S$:

- Ak sú $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t_i}, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t_j}$ ortogonálne na A, potom

$$\mathrm{d}S = \prod_{i=1}^{k} \left\| \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t_i} \right\| \mathrm{d}t_i,$$

  (Gramova matica je diagonálna).
- Pre $k = 1$ je $\mathrm{d}S = \mathrm{d}s = \left\| \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \right\| \mathrm{d}t$.
- Pre $k = 2, n = 3$ je $\mathrm{d}S = \sqrt{EF - G^2}\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2$ (už spomínaný vzorec - geometrické aplikácie množ. integrálov, iv).
- Pre $k = n - 1$ je to $\mathrm{d}S = \left\| \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t_{n-1}}(t) \right] \right\| \mathrm{d}\mathbf{t}$

Príklad 13.1.12.

Majme sférické súradnice v $\mathbb{R}^3$. Tie sú ortogonálne, tak sa ľahko ukáže, že platí $\mathrm{d}V = \mathrm{d}S\,\mathrm{d}\rho$. Ale taktiež vieme, že $\mathrm{d}V = \rho^2 \sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$. Z toho hneď máme $\mathrm{d}S = \rho_0 \sin\phi\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$ pri fixovanom ρ (sféra).

Príklad 13.1.13.

Spočítajme integrál

$$I = \int_M (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}S,$$

kde M je časť kužeľovej plochy $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 < x^2 + y^2 < 1$. Keďže ide o explicitne danú varietu, dostaneme

$$I = \int\limits_{0<x^2+y^2<1} (x^2 + y^2)\sqrt{1 + (f_x')^2 + (f_y')^2}\,\mathrm{d}(x, y) = \sqrt{2} \int\limits_{0<x^2+y^2<1} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}(x, y) =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^3\,\mathrm{d}(\rho, \phi) = \pi/\sqrt{2}.$$

Veta 13.1.14 (O nezávislosti na parametrizácii)**.**

Nech M je $k-$rozmerná varieta s dvoma parametrizáciami $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^k \to M \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{G} : B \subset \mathbb{R}^k \to M \subset \mathbb{R}^n$. Nech $f : M \to \mathbb{R}$, potom

$$\int_A f(\mathbf{F}(t))\sqrt{\det G\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t_k}\right)}\,\mathbf{dt} = \int_B f(\mathbf{G}(\tau))\sqrt{\det G\left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \tau_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \tau_k}\right)}\,\mathrm{d}\tau.$$

Príklad 13.1.15.

Majme varietu $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\} = S^1 \times \mathbb{R}$ (valec). Chceme spočítať integrál $I = \int_V (x^2+y^2+z^2)^{-1}\,\mathrm{d}S$. Na cvičení sme si ukázali, že táto varieta môže byť pokrytá jedným atlasom

$$(\phi, U): \quad \phi(u,v) = (u/r, v/r, \tan(r - \pi/2)), \;\; u \in (-\pi, \pi), \;\; r^2 = u^2 + v^2.$$

Avšak spočítať Gramovu maticu pre takúto parametrizáciu nie je jednoduché (môžete skúsiť). Iná parametrizácia je

$$(\psi, W): \quad \psi(u,v) = (\cos u, \sin u, v), \;\; u \in (-\pi,\pi), \;\; v \in \mathbb{R},$$

ktorá však nepokryje celý valec. Gramova matica v tomto prípade je diag(1) a teda determinant je rovný 1. Z toho hneď máme

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}(u,v)}{1+v^2} = 2\pi^2.$$

Prečo však môžeme použiť túto paramterizáciu?

Dôsledok 13.1.16.

- Ak varieta M je daná explicitne grafom funkcie $x_k = f(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) = f(\tilde{\mathbf{x}}), \;\; \tilde{\mathbf{x}} \in D \subset \mathbb{R}^{n-1}$, potom

$$\int_M F\,\mathrm{d}S = \int_D F(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, f(\tilde{\mathbf{x}}), x_{k+1}, \ldots, x_n) \sqrt{1 + \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2}\,\mathrm{d}\tilde{\mathbf{x}}.$$

- Ak varieta M je daná implicitne rovnicou $H(\mathbf{x}) = 0$, $\dfrac{\partial H}{\partial x_k} \neq 0$ na M a je projekcia π variety M do priestoru $(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ prostá, potom

$$\int_M F\,\mathrm{d}S = \int_{\pi(M)} F\,\frac{\|\nabla H\|}{|\partial H/\partial x_k|}\,\mathrm{d}\tilde{\mathbf{x}},$$

kde funkcie na pravej strane sa berú v odpovedajúcich bodoch $\pi^{-1}(\tilde{\mathbf{x}})$.

Definícia 13.1.17.

Povieme, že $M \subset \mathbb{R}^n$ je zovšeobecnená varieta dimenzie $k \in \{1, \dots, n-1\}$, ak je zjednotením konečného počtu disjunktných variet $M_1, \dots, M_s$ (rozklad variety M), kde M_i je dimenzie $l_i \in \{0, \dots, k\}$ a aspoň jedna z nich je dimenzie k. Množiny M_i nazývame komponentami rozkladu variety M.

Definícia 13.1.18.

Nech $M \subset \mathbb{R}^n$ je zovšeobecnená varieta dimenzie k a $M_1, \dots, M_s$ jej rozklad. Potom definujeme plošný obsah plochy M ako $S(M) := \sum_i S(M_i)$ a integrál z funkcie f cez M predpisom

$$\int_M f \,\mathrm{d}S := \sum_i \int_{M_i} f \,\mathrm{d}S,$$

kde sčítame cez také i, pre ktoré je M_i k-varieta.

Veta 13.1.19 (O nezávislosti rozkladu)**.**

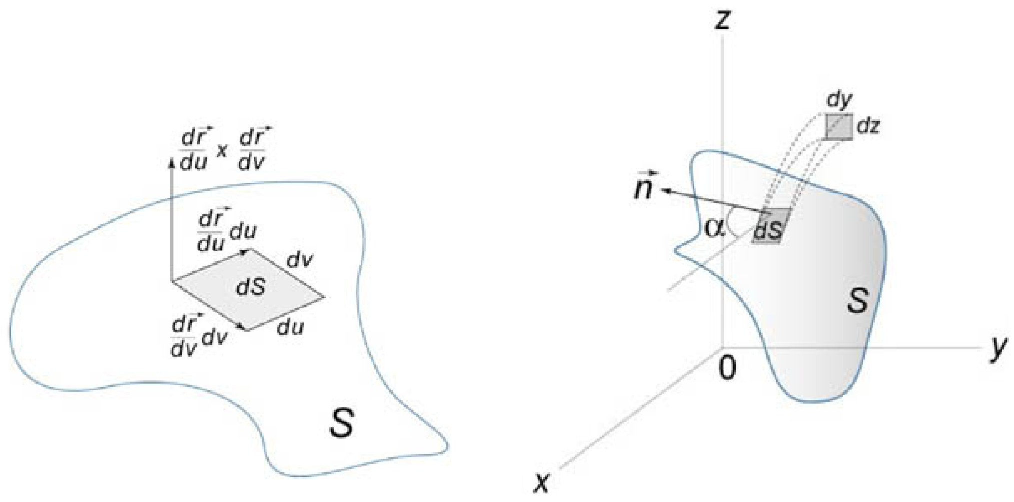
Nech $M \subset \mathbb{R}^n$ je zovšeobecnená hladká varieta dimenzie k, $M_1, \dots, M_s$ a $N_1, \dots, N_r$ sú dva jej rozklady. Potom

$$\sum_i \int_{M_i} f \,\mathrm{d}S = \sum_j \int_{N_j} f \,\mathrm{d}S$$

(sčítame cez také i, j, pre ktoré sú to k-variety.)

Poznámka 13.1.20.

Integrál $\int_M f \,\mathrm{d}S$ existuje, ak je $S(M) < \infty$ a f je spojitá a ohraničená na M, alebo je ohraničená a nezáporná na M.



(a) Plošný element pre plošný integrál 1 druhu. (b) Plošný element pre plošný integrál 2 druhu.

Obr. 13.1: Plošné elementy.

Príklad 13.1.21.

Spočítajme integrál $I = \int_K xyz\,\mathrm{d}S$, kde K je povrch kocky $[0,1]^3$. Kocku je možné rozdeliť na 6 stien, 12 hrán a 8 vrcholov. Samozrejme výpočet ovplyvnia iba 2-rozmerné komponenty (steny). Na 3 z nich je integrovaná funkcia nulová. Na zvyšných 3 je integrál rovnaký a tak stačí zrátať integrál iba cez 1 z nich. Zoberme $M_3 = \{(x,y,z) : x \in (0,1), y \in (0,1), z = 1\}$, ktorá je daná explicitne pomocou $f(x,y) = 1$. Z rovnosti $\mathrm{d}S = \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\,\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(x,y)$ máme

$$I/3 = \int\limits_{(0,1)^2} xy\,\mathrm{d}(x,y) = \frac{1}{4}.$$

Motiváciou pre definíciu plošného integrálu vektorového poľa bola rada problémov v prírodných vedách - predovšetkým v teórii poľa a prúdenia. Tento integrál je variáciou plošného integrálu zo skalárnej funkcie a predstavuje istú analógiu ku krivkovému integrálu vektorového poľa.

Definícia 13.1.22.

Ak je M $n-1$rozmerná orientovaná varieta (s parametrizáciou $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^{n-1} \to M \subset \mathbb{R}^n$) a $\mathbf{f} : M \to \mathbb{R}^n$, potom definujeme integrál 2. druhu cez možinu M z poľa $\mathbf{f}$ ako

$$\int_M \mathbf{f} \cdot \,\mathrm{d}\mathbf{S} := \int_A \mathbf{f}(\mathbf{F}(\mathbf{t})) \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t_{n-1}} \right] \mathrm{d}\mathbf{t}.$$

Poznámka 13.1.23.

Tento integrál je možné zapísať aj pomocou diferenciálov (teória diferenciálnych foriem). Napr. pre $n = 2$ je M krivkou a

$$\int_M \mathbf{f} \cdot \,\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_M f_1(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_2 - f_2(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1.$$

(Pozor na zámenu s integrálom $\int_M \mathbf{f} \cdot \,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_M f_1(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1 + f_2(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_2$). Pre dimenziu $n = 3$ je to zasa

$$\int_M \mathbf{f} \cdot \,\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_M f_1(x_1, x_2, x_3)\,\mathrm{d}(x_2, x_3) - f_2(x_1, x_2, x_3)\,\mathrm{d}(x_1, x_3) + f_3(x_1, x_2, x_3)\,\mathrm{d}(x_1, x_2),$$

resp.

$$\int_M \mathbf{f} \cdot \,\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_M f_1(x, y, z)\,\mathrm{d}(y, z) + f_2(x, y, z)\,\mathrm{d}(z, x) + f_3(x, y, z)\,\mathrm{d}(x, y),$$

kde však ide v našom prípade skôr o symbolický zápis, keďže nepoznáme teóriu diferenciálnych foriem a tzv. vonkajší súčin.

Definícia integrálu vektorového poľa je ekvivalentná s definíciou, pre ktorú potrebujeme pojem normálového poľa na danej variete. Každá štandardná varieta má práve dve jednotkové normálové polia s navzájom opačnou orientáciou. Konkrétnou voľbou jednotkového normálového poľa vlastne volíme jednu z dvoch možných strán elementárnej plochy. Hovoríme preto, že jednotkové normálové pole určuje jej orientáciu.

Veta 13.1.24 (Vzťah medzi integrálom prvého a druhého druhu)**.**

Nech M je $k-$rozmerná varieta s parametrizáciou $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^k \to M \subset \mathbb{R}^n$ kladne orientovanou vzhľadom k (spojitému) normálovému poľu k variete M,

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \frac{\left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t_{n-1}}\right]}{\left\|\left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t_{n-1}}\right]\right\|}$$

a $\mathbf{f} : M \to \mathbb{R}^m$ je vektorové pole ($g : M \to \mathbb{R}$ je skalárne pole). Potom

$$\int_M \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_M \mathbf{f} \cdot \mathbf{N} \,\mathrm{d}S \quad \left(\int_M g \,\mathrm{d}S = \int_M g\,\mathbf{N} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}\right),$$

ak aspoň jeden z integrálov má zmysel.

Dôsledok 13.1.25.

- Ak varieta M je daná explicitne grafom funkcie $x_3 = f(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in U \subset \mathbb{R}^2$, potom

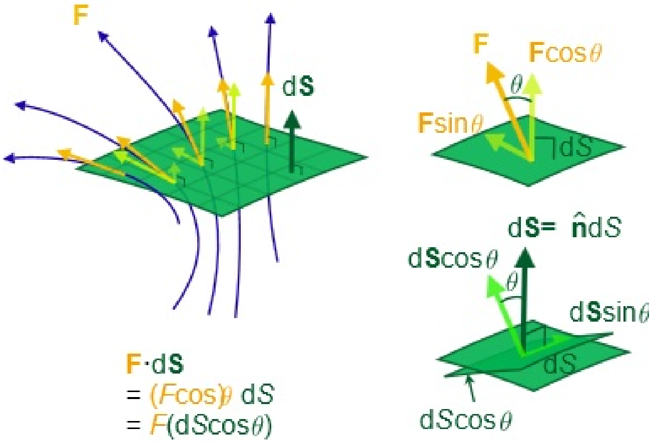
$$\int_M \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \pm \int_U \left[-F_1 \circ f \frac{\partial f}{\partial x_1} - F_2 \circ f \frac{\partial f}{\partial x_2} + F_3 \circ f\right] \mathrm{d}(x_1, x_2),$$

  kde znamienko určuje orientácia

- Ak varieta M je daná implicitne rovnicou $H(x_1, x_2, x_3) = 0$, $\dfrac{\partial H}{\partial x_3} \neq 0$ na M a je projekcia π variety M do priestoru (x_1, x_2) prostá, potom

$$\int_M \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\pi(M)} \left[F_1 \frac{\partial H/\partial x_1}{\partial H/\partial x_3} + F_2 \frac{\partial H/\partial x_2}{\partial H/\partial x_3} + F_3\right] \mathrm{d}(x_1, x_2),$$

  kde funkcie na pravej strane sa berú v odpovedajúcich bodoch $\pi^{-1}(x_1, x_2)$.



Obr. 13.2: Tok cez plošný element $\mathrm{d}\mathbf{S}$. Vľavo: Všetok tok vychádza von. Vpravo: Redukcia toku prechádzajúceho povrchom môže byť zobrazená redukciou $\mathbf{F}$ alebo $\mathrm{d}\mathbf{S}$.